* ناقش صحة القضية الآتية:
في أي موديول M تتحقق العلاقة التالية:

① --- $r.m = 0 \Rightarrow r=0$ أو $m=0$

البرهان:

أ) إذا كان $r=0$ يتم المطلوب

ب) إذا كان $r\neq 0$ يوجد $r^{-1} \in R$ بحيث

$r.r^{-1} = r^{-1}.r = 1$ و $r^{-1}.0_m = 0_m$

$\Rightarrow (r.r^{-1}).m = 0_m \Rightarrow 1.m = 0_m$

$\Rightarrow m = 0_m$

والقضية صحيحة عندئذ.

وبالتالي القضية ليست صحيحة بالحالة العامة وتكون صحيحة إذا وفقط إذا وجد لـ r معكوس في R بالنسبة للضرب

---

* هل يمكن النظر إلى كل حلقة واحدية أنها موديول على ذاتها
نعم، حيث إنها زمرة آبلية بالنسبة لعملية الجمع «لكونها حلقة»
وإذا أخذنا قانون التأثير الخارجي هو نفسه قانون الضرب المعرف
على هذه الحلقة عندئذ الشروط الأربعة تتحقق ويكون عندئذ
$_R R$ أو R_R

---

* هل يمكن اعتبار أي زمرة تبديلية مثل $(A,+)$ موديول على Z مجموعة الأعداد الصحيحة؟

نعم

إذا عرفنا التطبيق $(A,+)$ زمرة و A موديول

$f: Z \times A \to A$

$(n,a) \longrightarrow na : na = \underbrace{a+a+ \cdots +a}_{n \text{ مرة}} ; n>0$

$$na = \underbrace{(-a)+(-a)+ \cdots +(-a)}_{\text{مرة } -n} \quad ; \quad n<0$$

$$0 \cdot a = 0$$

وبسهولة يمكن التحقق من الشروط السبعة في تعريف الموديل

---

* R حلقة واحدية :

$$R^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in R\}$$

إذا عرفنا عملية الجمع بالشكل

$$+ : (a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$$

$$; \quad R \times R^n \longrightarrow R^n$$

وعملية الضرب

$$\times : \alpha(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$$

R^n موديل على R بالنسبة للعمليتين جمع الأزواج النونية المرتبة وضربها بعناصر من R

---

* $M_n(R)$ مجموعة المصفوفات من النمط n وأمثالها من R تعتبر موديل بالنسبة لجمع المصفوفات وضربها بعدد

---

* مثال :

إذا رمزنا R^S لمجموعة التطبيقات التي منطلقها المجموعة S غير خالية $S \neq \emptyset$ كل منها نقطة في الحلقة R

$$R^S = \{ f : S \longrightarrow R \} \quad ; \quad f \text{ تطبيق}$$

نعرف على R^S القانونين الآتيين،

1) $f, g \in R^S$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$; $x \in S$

2) $(\alpha . f)(x) = \alpha . f(x)$; $\forall \alpha \in R$

عندئذ تصبح المجموعة R^S موديولاً على R
$(R^S, +)$ زمرة آبلية بالنسبة لعملية الجمع
ويمكن اثبات الشروط الأخرى (وظيفة)

---

* ناقش صحة القضية التالية،
اذا كان R حلقة، G مثالية في R (Ideal) اي
مثالية في حلقة ما هي موديول على هذه الحلقة
أولاً: مادام G مثالية في R فهي زمرة جزئية من الزمرة الجمعية R

ثانياً:
$$R \times G \longrightarrow G$$
$$(r, g) \longrightarrow rg \in G \ , \ \forall r \in R$$
$$g \in G$$

وهو قانون تأثير خارجي على G مجموعة مؤثراته R ويتحقق من
اجله جميع الشروط اللازمة بتعريف الموديول.

---

* الموديول الجزئي،
تعريف، اذا كان M موديولاً على R و N مجموعة غير خالية في M
$$\emptyset \neq N \subset M$$

نقول أن N موديول جزئي في M إذا وفقط إذا كانت N موديول على R بالنسبة لنفس العمليات المعرفة على M (بالنسبة لنفس العمليات)
ويرمز له بالرمز $N \subseteq M$:
عادة نستطيع الحصول على المبرهنة الآتية .
تكون $N \subseteq M$ على R إذا وفقط إذا تحقق الشرطان .
$1)\ \forall a, b \in N \Rightarrow a - b \in N$

$2)\ \forall r \in R,\ a \in N \Rightarrow ra \in N$
$r \in R,\ a \in N\ ;\ (r.a) \in N$
البرهان :
1) الشرط الأول و N زمرة جزئية بالنسبة لعملية الجمع)
2) $r_1, r_2 \in R,\ a \in N \subseteq M : (r_1 + r_2) . a = r_1 a + r_2 a$
والشروط الأخرى يمكن إثباتها بسهولة كون تحققها يكون من الموديول M

* يمكن دمج الشرطين السابقين بشرط واحد
$\forall \alpha, \beta \in R,\ \forall\ a, b \in N$
$\alpha a + \beta b \in N$ ——— ③
أي أن الشرطين ① و ② يكافئان الشرط ③
إذا تحقق ① و ② فإن الشرط المنزل ③ يتحقق دوماً
والعكس صحيح

* ملاحظات ونتائج :
1) في أي موديول يوجد على الأقل موديولان جزئيان هما الموديول الصفري (الصفر المحايد بالنسبة للجمع) والموديول نفسه وأي موديول جزئي آخر يدعى موديولاً جزئياً فعلياً .

2) برهن على أن تقاطع عائلة من الموديلات الجزئية في موديول ما هو موديول جزئي.

عملية التقاطع: $L, N \hookrightarrow_R M$

$$\overset{?}{\Rightarrow} L \cap N \hookrightarrow_R M$$

البرهان:

(1) $0_M \in L, \; 0_M \in N \Rightarrow 0_M \in L \cap N$

أي أن $L \cap N \neq \phi$ غير خالية

2) $a, b \in L \cap N \overset{?}{\Rightarrow} a - b \in L \cap N$

$$\left.\begin{array}{ll} a, b \in L, & L \hookrightarrow M \\ a, b \in N, & N \hookrightarrow M \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a - b \in L \\ a - b \in N \end{array}$$

$$\Rightarrow a - b \in L \cap N$$

3) $\forall x \in L \cap N \Rightarrow x \in L, \; x \in N$

$, \; \alpha \in R$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha x \in L & : L \hookrightarrow M \\ \alpha x \in N & : N \hookrightarrow M \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x \in L \cap N$$

من كل الشروط نتج المطلوب.

---

* ملاحظة:

$$A \in \Omega(X) : A \cup \phi = \phi \cup A = A$$

$$A \cap X = X \cap A = A$$

نلاحظ أن نشير أن التقاطع هو أكبر الموديلات الجزئية (من حيث الاحتواء) المحتواة في كل من الموديلين.

أي إذا وجد مودول جزئي محتوى في كل منهما فإنه سيكون محتوى في التقاطع

يبرهن أن: $nZ \cap mZ = lcm(n,m).Z$

$lcm(n,m)$ المضاعف المشترك الأصغر لـ (n,m)

نطبق ذلك على Z كمودول على ذاتها فنبرهن أن المودول الجزئي بالصيغة التي هي nZ :

$nZ = \{\pm nt \; ; \; t \in Z\}$

$mZ = \{\pm mt \; ; \; t \in Z\}$

$nZ \cap mZ = SZ$

$S = lcm(n,m)$ ،

مثال: $2Z \cap 5Z = 10Z$

3) عملية الجمع:

نفرض أن M مودول على R وأن $L, N \subseteq_R M$

نعرف المجموع:

$L+N = \{x \in M ; x = a+b \; , \; a \in L , b \in N\}$

واضح أن $L+N$ هو نفسه $N+L$ لأن L, N من M والجمع في M تبديلي

برهنة:

$L+N \subseteq M$

$L+N$ مودول جزئي من M ولكن لا يتم

ويدعى مجموع المودولين الجزئيين

البرهان :

1) $L+N \neq \phi$

$0_m \in L \quad , \quad 0_m \in N$

$0_m = 0 + 0 \in L+N$

$\Rightarrow L+N \neq \phi$

الحيادي في اي زمرة هو نفسه الحيادي في اي زمرة جزئية منها

2) $x , y \in L+N \overset{?}{\Rightarrow} x-y \in L+N$

$\Rightarrow a , a' \in L$

$b , b' \in N$

$x = a+b \qquad y = a'+b'$

$\Rightarrow x-y = (a+b) - (a'+b')$

$= (a-a') + (b-b')$

$= a'' + b''$

$; \ a'' = a-a' \quad , \quad b'' = b-b'$

$a , a' \in L \quad ; \ L < M$

$\Rightarrow a-a' \in L \Rightarrow a'' \in L$

$b , b' \in N \quad , \ N < M$

$\Rightarrow b-b' \in N \Rightarrow b'' \in N$

$\Rightarrow x-y = a'' + b'' \in L+N$

3) $\forall r \in R \ , \forall x \in L+N \overset{?}{\Rightarrow} rx \in L+N$

$r \in R \ , \ a \in L \ , \ b \in N \ , \ x = a+b$

$rx = r(a+b) = ra + rb$

$r \in R \, , \, a \in L \, , \, L \hookrightarrow M$

$\Rightarrow ra \in L$

$r \in R \, , \, b \in N \, , \, N \hookrightarrow M$

$\Rightarrow rb \in N$

$\Rightarrow ra + rb \in L + N$

$\Rightarrow rx \in L + N$

غير خالية وتحقق الشرطين $\Leftarrow$ $L+N$ مودول جزئي في M على R

$L + N \hookrightarrow {}_R M$

---

* اثبت أن $L \hookrightarrow L+N$

$\forall a \in L \Rightarrow a + 0 \in L + N$

$\Rightarrow L \hookrightarrow L + N$

وبالمثل $N \hookrightarrow L + N$

ويسمى هذا المودول مجموع المودولين الجزئيين L , N

---

* ملاحظة :

نشير هنا إلى أن هذا المودول الجزئي هو أصغر المودولات الجزئية الحاوية كل من المودولين

$L + N$

N L

$L \cap N$

اذا نظرنا الى Z كمودل على ذاتها فإن:

$$nZ + mZ = dZ \quad ; \quad d = gcd(n,m)$$

القاسم المشترك الأكبر : $gcd(n,m)$

★ تمارين وظيفة:

① اثبت أن مجموعة المصفوفات القطرية من المرتبة n تؤلف $M_n(R)$ مودولاً جزئياً بالنسبة لجمع المصفوفات وضربها بعدد.

② اثبت ان المجموعة

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; a, b \in R \right\}$$

تؤلف مودولاً جزئياً في $M_2(R)$

③ اثبت أن المجموعة: $U = \{(\lambda, \lambda) ; \lambda \in R\}$ تؤلف مودول جزئي في R^2 ماذا يمثل هندسياً

لو فرضنا أن $\lambda \in R^+$ هل يبقى مودول جزئي.

انتهت المحاضرة ⑤